**一、判断以下命题的真假.如果为真在后面括弧内打✔，否则打×.**

　　1.A={x|x∈N 且(x,5)=1}，则构成代数系统，+为普通加法 (　　)

　　2.∀x, y∈R，xoy=|x−y|，则0 为的单位元 (　　)

　　3.∀x, y∈R，xoy=x+y+xy，则∀x∈R，x−1=−x/(1+x) (　　)

　　4.整环的积代数不一定是整环 (　　)

　　5.格同态具有保序性 (　　)

　　6.在有补格中，∀a∈L，求a 的补是L 的一元运算 (　　)

**解答：**1. × 2. × 3. ×. 4. ✔ 5. ✔ 6. ×

**二、形式化下列语句**

　　1. 有的实数不是有理数，但所有的有理数都是实数。

　　2. 对于任意实数都存在比它大的实数 .

　　3. 若那套房子有三室一厅，并且居住面积在90平米以上，老王就要那套房子。

　　4. 每位父亲都喜欢自己的孩子。

**三、填空**

　　1. 设p：1+1=5，q：明天是阴天，则命题"只要1+1=5，那么明天是阴天"可符号化为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，其真值是\_\_\_\_\_\_\_\_.

　　2. 在公式( z)(P(z)→Q(x，z))∧( z)R(x，z)中， z的辖域是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_， z的辖域是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

　　3. 设R为非空集合A上的二元关系，如果R具有自反性。\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_则称R为A上的一个偏序关系。

　　4. 设x={1，3，5，9，15，45}，R是x上的整除关系，则R是x上的偏序，其最大元是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，极小元是\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**四、解答题**

1. 证明或推翻下列命题：“设平面上有 100 个点，其中任意两点间的距离至少是1，则最多有300 对点距离恰好是1”。

　　解答与评分标准：

　　命题成立(2 分)。

　　无向图 G=，V 是平面上的这100 个点，两个点相邻当且仅当这两点距离恰好是1(2 分)。

　　每个顶点的度数不超过 6(3 分)。

　　根据握手定律(3 分)，

　　2|E|=顶点度数之和≤100\*6, 所以这个图的边数不超过300(2 分)。

　　2. 所谓 n 维网格就是一个无向图G=，其中V={ | 1≤ij≤mj,1≤j≤n}，E={(v1,v2)| v1 和v2 恰好只在一个坐标上相差1}。讨论当mj 和n 取哪些正整数值时，G 是哈密顿图，并给出证明。

　　解答与评分标准：

　　分情况讨论。注意 G 的顶点数是m1\*m2\*m3\*…\*mn。

　　(1) 所有mj 都为1：G 是平凡图，是哈密顿图(2 分)。

　　(2) 恰好有一个mj 大于1：G 是长度大于1 的初级路径，不是哈密顿图(2 分)。

　　(3) 至少有两个mj 大于1：G 是偶图(无奇数长度回路)(2 分)。

　　(3a) m1\*m2\*m3\*…\*mn 是偶数：G 是哈密顿图，用归纳法构造哈密顿回路(2 分)。

　　(3b) m1\*m2\*m3\*…\*mn 是奇数：G 不是哈密顿图，偶哈密顿图两部分顶点数相等，总顶点数是偶数(2 分)。

　　3. 证明或推翻下列命题：“任意给定平面上有限个点，则连接这些点的最短哈密顿回路的长度不超过连接这些点的最小生成树(不添加额外顶点)的长度的2 倍。子图的长度就是这个子图上的边的长度之和。”

　　解答与评分标准：

　　命题成立(2 分)。

　　(课本图论部分最后一章定理)先求最小生成树奇数度顶点之间的“最小”匹配，加入匹配“边”得到欧拉图(3 分)。

　　沿着欧拉回路前进，“抄近路”避开已经访问过的顶点，就得出哈密顿回路(3 分)。

　　由于距离的三角形不等式，这条哈密顿回路长度不超过最小生成树长度的2 倍(2 分)。

　　4. 画出所有非同构的 5 阶根树。

　　解答与评分标准：

　　9 种(每种1 分，重复画扣0.5 分，全画10 分)。非同构的5 阶树共有3种，分别选一个顶点做根。

　　5.证明或推翻下列命题：“设连通简单平面图G 的最小度δ(G)≥4，则G 的点色数χ(G)≥3.”

　　解答与评分标准：

　　假设χ(G)<3.(反证法分情况讨论2 分)

　　χ(G)=1 当且仅当G 为n 阶零图，与已知矛盾。(4 分)

　　χ(G)=2 当且仅当G 为二部图，因为G 为平面图，只能为K2,s 或Kr,2. 此时必有δ(G)=2, 与已知矛盾。(4 分)